МКОУ «Эндирейская СОШ№2» Хасавюртовского района

Республики Дагестан

**Тема: «Решение задач с помощью рациональных уравнений»**

Учебно-исследовательская работа

Научное направление: математика 8-11 классы

*Выполнила:*

ученица 9 класса

МКОУ «Эндирейская СОШ№2»

Османова

Амина Аскеровна

*Руководитель:*

учитель математики

МКОУ «Эндирейская СОШ№2»

Исаева Мадина Камильевна

2019г

Оглавление

1. Введение…………………………………………………………….…....3
2. Основная часть

2.1.История возникновения уравнений….………….…………………..……..5

2.2.Способы решения задач……………………………………………………10

2.3. Решение рациональных задач ОГЭ……..…………….………………......13

2.4. Решение рациональных задач ЕГЭ………………………………….……17

 3. Заключение……………………………………………………………….19

 4. Литература………………………………………………………………..20

**Введение**

В 8 классе мы изучили дробные рациональные уравнения и решение задач с помощью рациональных уравнений. Умение решать их необходимо, поскольку решения задач с помощью рациональных уравнений- это базовая тема школьного курса математики. Умение решать задачи с помощью рациональных уравнений нам пригодятся при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня. В учебниках по алгебре рассматриваются решения задач с помощью рациональных уравнений на движение, на работу и на проценты. Мне стало интересно - есть ли ещё какие-нибудь способы решения рациональных задач, а может одну и ту же задачу можно решать разными способами. Я люблю математику и мне хотелось бы развить своё логическое мышление, сообразительность.

**Актуальность.**Рациональные задачи, на мой взгляд, трудный материал. Однако в школьном курсе математики ему придается большое значение, так как такие задачи способствуют развитию логического мышления, речи. Данная тема интересна, потому что многие рациональные задачи очень трудно решить. Научившись решать рациональные задачи, я смогу применять их не только на уроках, но и олимпиадах, при сдаче ОГЭ и ЕГЭ.

**Цели работы:**

* Знакомство с новыми методами решения квадратных уравнений
* Углубление знаний по теме «Решение задач с помощью рациональных уравнений»
* Развитие математических, интеллектуальных способностей, навыков исследовательской работы
* Создание условий для самореализации личности

**Задачи:**

* подобрать информацию по данной теме из учебников, письменных источников и сети Интернет;
* рассмотреть способы решения задач
* узнать можно ли решить любуюзадачу разными способами; выявить, особенности и недостатки этих способов решения задач;
* исследовать историю развития данной темы в математике.

Объект исследования:задачи.

Предмет исследования:  решение задач с помощью рациональных уравнений.

Гипотеза:существуют ли другие способы решения задач?

***История возникновения уравнений.***

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических действий над данными величинами. В алгебре изучаются общие свойства действий над величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в Древнем Вавилоне.

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени еще в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне.Уже в древности люди осознали, как важно научиться решать алгебраические уравнения вида

*а0хn+а1хn-1+…+аn=0*

—ведь к ним сводятся очень многие и очень разнообразные вопросы практики и естествознания (конечно, здесь можно сразу предполагать, что *а0≠0,*так как иначе степень уравнения на самом деле не n, а меньше). Уместно напомнить, что сам термин «алгебра» происходит от названия сочинения Мухаммеда аль-Хорезми, (то есть Мухаммеда из Хорезма) «Аль-джебр аль-мукабала», в котором излагались решения такого уравнения при n=1 и n=2.

Уравнения первой степени с одним неизвестным решали уже в Древнем Египте и в Древнем Вавилоне. Вавилонские писцы умели решать и уравнения второй степени. Евклид решал уравнения второй степени геометрически. Для математиков, уже умевших решать уравнения первой и второй степени, самым желанным было научиться решать уравнения третьей степени. Одним из первых этим вопросом заинтересовался таджикский ученый Омар Хоийен (1048-1122). Омар Хоийен придумал очень сложные и красивые способы геометрических построений для отыскания неизвестного. Но для практического использования они неудобны.

Многим, разумеется, приходила в голову заманчивая мысль найти и для любой другой степени n>2 формулы, которые выражали бы корни уравнения через его коэффициенты с помощью четырех арифметических действий – сложения, вычитания, умножения, деления – и извлечения корней или радикалов, то есть, говоря более кратко, решали бы уравнение в радикалах.

Однако «мрачное средневековье» оказалось как нельзя более мрачным и в отношении обсуждаемой задачи – в течение целых семи столетий требуемых формул никто не нашел. Только в 16 веке итальянским математикам удалось продвинуться дальше – найти формулы для n=3 и n=4.

Были периоды, когда начинало казаться, что сил человеческого ума недостаточно для решения этой задачи. Томас Торквемада–глава инквизиции в Испании, монах-доминиканец – считал, что решение таких уравнений волей бога изъято из возможностей человеческого разума. И когда один из его друзей, математик по имени Паоло Вальмес, неосторожно сказал Торквемаде, что он, Вальмес, умеет решать уравнения даже четвертой степени, Торквемада бросил его в тюрьму, а затем отправил на костер за «борьбу с божественной волей». Вальмес никому не успел сообщить о своем открытии. Это было в конце 15 века.

Сегодня ученый, сделав какое-либо открытие, стремится поскорее рассказать о нем на научной конференции, опубликовать статью в научном журнале. Совсем не так было в 16 веке. Сделав открытие, средневековый мыслитель скрывал его как можно дольше, оставаясь, так сказать, единственным владельцем того, чего нет ни у кого другого. Так было и в этом случае.

Для математиков того времени существовало не одно уравнение третьей степени

х3+рх2+qx+r=0,

а несколько, из которых главнейшими были три:

х3+рх=q

х3=рх+q

х3+рх2=q

А почему же не одно? Потому что в те времена рассматривались лишь уравнения с положительными коэффициентами. Первыми из них было решено уравнение х3+рх=q. Это удалось сделать итальянскому математику *Сципиону Даль Ферро (1465-1526).*

Даль Ферро не опубликовал найденного им способа, но некоторые из его учеников знали об этом открытии, и вскоре один из них, *Антонио Фиор,*решил им воспользоваться.

В те годы были распространены публичные диспуты по разного рода научным или считавшимися научным вопросам. Победители таких диспутов обычно получали неплохое вознаграждение, их часто приглашали на высокие посты, от исхода научного поединка нередко зависела судьба ученого. Фиор рассчитывал на победу в любом диспуте, ведь он знал то, чего не знали другие (правда, он не знал много, что знали другие).

В это время в итальянском городе Верна жил небогатый учитель математики *Никколо Тарталья (1499-1557).*Тарталья был очень талантливым человеком и сумел в 1535 году заново открыть прием, изобретенный Сципионом Даль Ферро.

Состоялся поединок между Фиором и Тартальей. По условию, соперники обменялись тридцатью задачами, на решение которых отводилось шестьдесят дней. Но так как Фиор знал по существу только одну задачу и был уверен, что какой-то учитель решить ее не сможет, то все его тридцать задач оказались однотипными. Тарталья был хорошо подготовлен к их решению и справился со всеми тридцатью задачами за два часа. Фиор же не смог решить ни одной из задач, предложенных его противником. Победа прославила Никколо Тарталью на всю Италию, но вопрос о решении уравнений третьей степени еще не был решен до конца, кроме того, надо было привести в систему все, что было известно о решении разных видов кубических уравнений.

Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, и кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:



Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

(1)

В уравнении (1) коэффициенты, могут быть и отрицательными. Правило Брахмагупты по существу совпадает с нашим.

Формы решения квадратных уравнений по образцу Аль-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202г. итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел.

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

После открытия в середине 16 века решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степени математики смогли констатировать, что уравнения первой – четвертой степени имеют соответственно 1, 2, 3, 4 корня, которые могут быть положительными, равными нулю, отрицательными или мнимыми. Этот факт наводил на мысль о том, что уравнение n-й степени (n>0) должно иметь n корней. Впервые эту мысль явно высказал в 1629 году замечательный математик Альберт Жирар в главном своем труде «Новое открытие в алгебре». Жирар, став учеником Симона Стевина, внес значительный вклад в развитие алгебры. Не установлено, была ли книга Жирара известна Декарту. Декарт в своей «Геометрии» (1637) ставит вопрос: «Сколько корней может иметь любое уравнение?» И тут же отвечает: «Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений», то есть число корней уравнения может быть равно показателю степени уравнения. Он подразумевает только действительные корни, но дальше оговаривает, что если только некоторые из указанного числа действительные, то остальные мнимые.

На рубеже XVI—XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики.

**Способы решения задач**

В давние времена обученным считался тот, кто умел решать задачи определенных типов.   Решение задач – это работа несколько необычная, а именно умственная работа. А чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придётся работать, те инструменты или способы, с помощью которых выполняется эта работа.

В современной математике существуют различные способы решения текстовых задач:

* арифметический,
* алгебраический,
* геометрический,
* схематический,
* графический

*Арифметический метод.* Решить задачу арифметическим способом значит найти ответ, на требование задачи, выполняя арифметические действия над числами.

*Алгебраический метод***.** Решить задачу алгебраическим способом - это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или системы уравнений (или неравенств).

*Геометрический метод.*Решить задачу геометрическим методом - значит найти ответ на требование задачи, используя геометрические построения или свойства геометрических фигур.

*Схематический.* Решить задачу схематическимспособом - это значит найти ответ на требование задачи, как правило, с помощью схем.

*Графический.* Решить задачу графическим способом - значит решить задачу с помощью графиков в прямоугольной системе координат.

Известный американский педагог и математик Д.Пойа пишет, что «составить уравнение – значит выразить символами условие, сформулированное словами. Это перевод с обычного языка на язык математических формул. Трудности, которые могут встретиться при составлении уравнений, являются трудностями перевода».

При решении задачи ***алгебраическим способом*** необходимо выполнить несколько этапов:

1) Арифметическую краткую запись условия задачи (цель этого этапа-осмысление задачи и выяснение связей между величинами). Форма записи может быть различной – схематический чертёж или таблица всех известных и неизвестных данных задачи. Важно помнить, что этот этап может отсутствовать, если решение задачи элементарно или она не особо усложнена условиями. Неизвестные величины на чертеже или в таблице удобно обозначать знаком «?», а главный вопрос задачи, например, выделить в «кружок». Нужно помнить, что единицы измерения всех величин должны быть единые. Намного облегчает решение задачи общепринятые обозначения в математике, физике и т.д.

2) Алгебраическая краткая запись условий задачи (цель этапа – удачно выбрать переменную и выразить все неизвестные величины задачи через неё. Форма записи такая, как и на 1 этапе, но только вместо знаков «?» везде надо записать выражения с переменной. Важно помнить, обычно этот этап начинается с фразы: «Пусть *x* единиц -…, тогда…». Чаще всего за неизвестное принимают главный  вопрос задачи, хотя бывает это и неудобно, тогда за неизвестное принимают другую величину. При введении переменной необходимо учесть наибольшее удобство математической записи условия задачи.

3) Составление и решение уравнения или системы уравнений или неравенств (цель этапа – составить уравнение или неравенство, опираясь на условие задачи, и найти его решение). Необходимо учитывать область допустимых значений переменных (ОДЗ), чтобы составить уравнение нужно увязать известные и неизвестные данные задачи в формулы. Например, *s=vt.*

4) Анализ решения уравнения или неравенства. Цель этапа – из всех найденных решений уравнения выбрать те, которые подходят по смыслу задачи. Обычно этот этап начинается фразой: «По смыслу задачи *x*должна быть величиной…» (положительной, натуральной, целой, принадлежащей промежутку и т.д.) Если смысловое значение не выполнено, то найденную величину называют  посторонним решением. Полезно провести проверку.

5) Запись ответа в соответствии с вопросом задачи.

Решим алгебраическим способом

Алгебраический способ решения задач является самым распространенными наиболее общим в школьном курсе изучения математики.

**Решение рациональных задач ОГЭ**

 На ОГЭ и ЕГЭ встречаются задачи, решаемые с помощью рациональных уравнений.

ОГЭ задача:

 № 1. Первый велосипедист выехал из поселка по шоссе со скоростью 21 км/ч. Через час после него со скоростью 15 км/ч из того же поселка в том же направлении выехал второй велосипедист, а еще через час- третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 9 часов после этого догнал первого.

**Решение.**

Обозначим через x км/ч скорость третьего велосипедиста. Перед выездом третьего велосипедиста первый ехал уже 2 часа и проехал 42 км, а второй ехал 1 час и проехал 15 км. Скорость сближения третьего со вторым равна x-15 км/ч. Следовательно, третий догнал второго через  часов. Скорость сближения третьего с первым равна x-21 и он догнал его через  часов. Так как третий догнал первого через 9 часов после того, как он догнал второго, можно записать равенство:

,

откуда



Решаем квадратное уравнение, получаем корни:



Так как скорость третьего велосипедиста не может быть меньше, чем у второго 15 км/ч, то получаем решение x = 25 км/ч.

**Ответ:** 25.

**ОГЭ задача:**

№ 2. Два автомобиля одновременно отправляются в 950- километровый пробег. Первый едет со скоростью на 18 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

**Решение.**

Обозначим через x км/ч скорость первого автомобиля. Тогда скорость второго автомобиля равна x-18 км/ч. Первый проезжает путь в 950 км за  часов, а второй за  часов. Так как первый прибывает на 4 часа раньше второго, получаем уравнение:

,

откуда



Решаем квадратное уравнение:



Имеем только один положительный корень x=75 км/ч.

**Ответ:** 75.

ОГЭзадача

№ 3. Имеются два сосуда, содержащие 30кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 81% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

**Решение.**

Пусть x% - концентрация первого раствора и y% - концентрация второго раствора. Тогда величину кислоты, содержащейся в первом растворе можно определить как , а во втором растворе как . В задаче сказано, что если объединить эти два раствора, то получится раствор 81% кислоты, то есть величина кислоты в объединенном растворе будет равна . Имеем уравнение

.

Также в задаче сказано, что при равных объемах растворов получается раствор 83% кислоты, то есть можно записать, что



Получаем систему двух уравнений:



Умножим второе уравнение на 30



и вычтем из первого, получим:



Таким образом, второй раствор имеем концентрацию 93% и кислоты во втором растворе равно

 кг.

**Ответ:** 18,6.

**Решение рациональных задач ЕГЭ**

ЕГЭ задача:

№ 4. Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в километрах в час.

**Решение.**

Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна  км/ч. Тогда скорость лодки против течения будет равна  км/ч. Расстояние в 77 км лодка преодолеет с такой скоростью за  часа. На обратном пути лодка шла по течению, следовательно, со скоростью  км/ч и прошла 77 км за  часа. В задаче сказано, что на обратный путь было потрачено на 4 часа меньше, получаем уравнение



Решаем уравнение, имеем:



Так как скорость лодки должна быть положительной, получаем ответ 9 км/ч.

**Ответ:** 9.

ЕГЭ задачи:

№ 5. На изготовление 522 деталей первый рабочий затрачивает на 11 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 609 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 8 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

**Решение.**

Пусть  деталей делает первый рабочий за 1 час. Тогда второй рабочий за 1 час делает  деталей. Для изготовления 522 деталей первому рабочему потребуется  часов, а второму для изготовления 609 деталей  часов. В задаче сказано, что первый рабочий для изготовления 522 деталей затрачивает на 11 часов больше, чем второй для изготовления 609 деталей. Получаем уравнение:



Отсюда имеем:



Решаем квадратное уравнение, получаем два корня



Выбираем первое решение 29, т.к. число деталей не может быть отрицательным числом.

**Ответ:** 29.

Для выявления актуальности моей темы я провела исследование. Учащимся 9-11 классов было предложено решать задачи. В исследовании приняло участие 9 учащихся (100%) . Результаты исследования выявили следующее:

что задачи

 №1 решили –0%

№2 решили-20%

№3 решили-0%

№4 решили-15%

№5 решили-25%

**Заключение**

Человечество прошло длительный путь от незнания к знанию, непрерывно заменяя на этом пути неполное и несовершенное знание все более полным и совершенным.

Задачи, решаемые с помощью рациональных уравнений относятся к одним из самых трудных разделов школьного курса математики, так как их решение связано с умением проводить сложные логические построения. Они играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры, но, как правило, решение таких задач вызывает трудности.Рассматривая различные источники и анализируя литературу, мы пришли к выводу, что алгебраический способ - универсальный, но *знание различных способов часто упрощает решение задачи*. На основе изученного материла, были описаны способы решения задач и были рассмотрены задачи с ОГЭ и с ЕГЭ .Основным в решении задач является правильно выбрать рациональный способ решения и применить алгоритм решения.Некоторые способы решения помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на ОГЭ и ЕГЭ.

Кроме того, мы пришли к выводу, что данная тема должна более глубоко изучаться в школьной программе, так как знания по этой теме помогут учащимся успешно сдать ОГЭ и ЕГЭ.

Таким образом, считаем, что задачи, поставленные нами, решены, цель работы достигнута.

     В процессе исследования мы рассмотрели различные задачи.Эти задачи должны заинтересовать увлекающихся математикой школьников.

***Список используемой литературы***

1. Алгебра. 8 класс : учеб. Для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков, С.Б.Суворова]. – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 271с. : ил. –ISBN 978-5-09-025167-9
2. http://textarchive.ru/c-1188349.html
3. <https://fsd.multiurok.ru/html/2018/02/18/s_5a89c21654a2f/img25.jpg>
4. <https://multiurok.ru/files/reshenie-zadach-s-pomoshchiu-ratsionalnykh-uravn-1.html>
5. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под редакцией И.В.Ященко -Москва : издательство «Национальное образование», 2019.-256с.-(ЕГЭ.ФКР-школе).
6. ОГЭ. Математика: типовые экзаменационные варианты: О-39 36 вариантов/ под редакцией И.В.Ященко -Москва : издательство «Национальное образование», 2018.-240с.-(ОГЭ.ФИПИ-школе).